

## ข้อสอบปลายภาควิชา Vibrations Waves & Optics

1. คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า  $(\vec{E}, \vec{H})$  เดินทางในแนวแกน  $x$  ภายในท่อนำคลื่นตัวนำกลวง (conducting hollow waveguide) ที่มีพื้นที่หน้าตัดค่าหนึ่ง องค์ประกอบในแนวสัมผัส (Tangential component) ของ  $\vec{E}$  ณ บริเวณผนังตัวนำต้องเป็นศูนย์ตลอดเวลา จงตอบคำถามต่อไปนี้

(1.1) (2 คะแนน) จงเขียน wave equation สำหรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน rectangular coordinates 3 มิติ

(1.2) (5 คะแนน) จงแสดงให้เห็นว่าเมื่อแทน wave function  $\vec{E} = E(y, z)\hat{n} \cos(\omega t - k_x x)$  ซึ่งเป็น solution ลงใน wave function ในข้อ 1.1 ทำให้ได้

$$\frac{\partial^2 E(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E(y, z)}{\partial z^2} = -k^2 E(y, z)$$

เมื่อ  $k^2 = \omega^2/c^2 - k_x^2$  และ  $k_x$  คือ wave number สำหรับแนวการเดินทางของคลื่นในแกน  $x$ ,  $\hat{n}$  คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยสำหรับทิศทางใน  $yz$  ในระนาบ  $yz$

(1.3) (8 คะแนน) ถ้าท่อนำคลื่นตัวนำกลวงมีโครงสร้างหน้าตัดเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง  $a$  ในแนวแกน  $y$  และสูง  $b$  ในแนวแกน  $z$  โดยมี boundary conditions  $E_x = 0$  ณ ตำแหน่ง  $y = 0$ ,  $y = a$  และ  $z = 0$ ,  $z = b$  จงแสดงให้เห็นว่า electric field ในแนวแกน  $x$  เขียนได้เป็น

$$E_x = A \sin \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{n\pi z}{b} \cos(\omega t - k_x x)$$

เมื่อ  $k^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right); m, n = 1, 2, 3, \dots$  และ  $A$  คือ ค่าคงตัว

(แนะ เริ่มต้นจากให้  $E_x = F(y, z)\cos(\omega t - k_x x)$  โดยที่  $F(y, z) = G(y)H(z)$  และใช้เทคนิค separation variables เพื่อหา solution ที่ต้องการ)

2. กำหนดให้องค์ประกอบในแนวแกน  $x$  และ  $y$  ของสนามไฟฟ้าเขียนได้เป็น

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - kz) \quad \text{และ} \quad E_y = E_{y0} \cos(\omega t - kz + \phi)$$

(2.1) (7 คะแนน) จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ที่เรียกว่า ellipse equation ระหว่าง  $E_x$  และ  $E_y$  เขียนได้เป็น

$$\left( \frac{E_x}{E_{x0}} \right)^2 + \left( \frac{E_y}{E_{y0}} \right)^2 - 2 \left( \frac{E_x}{E_{x0}} \right) \left( \frac{E_y}{E_{y0}} \right) \cos \phi = \sin^2 \phi$$

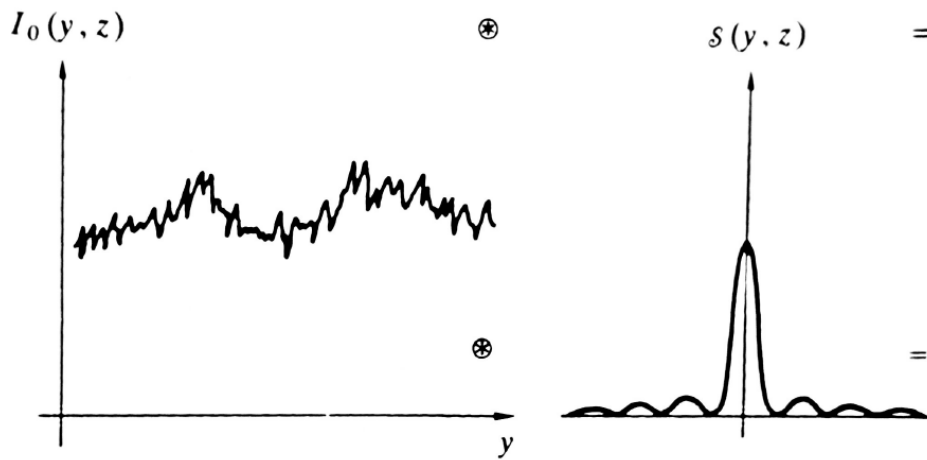
(2.2) (3 คะแนน) จาก ellipse equation ใน (2.1) ให้วาดรูปความสัมพันธ์เมื่อ  $E_{x0} = 2E_{y0}$  บน

$E_y$  vs  $E_x$  coordinate system เมื่อกำหนดให้ major axis ของวงรีอยู่ในแนวแกน x

3. (7 คะแนน) โดยอาศัย Jones calculus จงแสดงให้เห็นว่า retarder ใด ๆ ที่ทำมุม  $45^\circ$  (กับแนวแกน x) ระหว่าง quarter-wave plate ที่มี optic axis ในแนวแกน x (horizontal axis) และ quarter-wave plate ที่มี optic axis ในแนวแกน y (vertical axis) สามารถทำหน้าที่เป็น rotator ได้  
กำหนด Jones matrices ของ retarders ดังในตารางข้างล่าง  
(จาก [https://en.wikipedia.org/wiki/Jones\\_calculus](https://en.wikipedia.org/wiki/Jones_calculus) )

Phase retarders	Corresponding Jones matrix
Quarter-wave plate with fast axis vertical <sup>[2][note 1]</sup>	$e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
Quarter-wave plate with fast axis horizontal	$e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
Quarter-wave plate with fast axis at angle $\theta$ w.r.t the horizontal axis	$\begin{pmatrix} \cos^2 \theta + i \sin^2 \theta & (1 - i) \sin \theta \cos \theta \\ (1 - i) \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta + i \cos^2 \theta \end{pmatrix}$
Half-wave plate with fast axis at angle $\theta$ w.r.t the horizontal axis	$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$
Arbitrary birefringent material (as phase retarder)	$\begin{pmatrix} e^{i\eta/2} \cos^2 \theta + e^{-i\eta/2} \sin^2 \theta & (e^{i\eta/2} - e^{-i\eta/2}) e^{-i\phi} \cos \theta \sin \theta \\ (e^{i\eta/2} - e^{-i\eta/2}) e^{i\phi} \cos \theta \sin \theta & e^{i\eta/2} \sin^2 \theta + e^{-i\eta/2} \cos^2 \theta \end{pmatrix}$

4. (8 คะแนน) จงวาดภาพของ convolution :  $I(y, z) \otimes S(y, z)$  และใช้ convolution theorem หา Fourier transform ของ convolution ที่ได้



5. (5.1) (5 คะแนน) ชายคนหนึ่งอายุ 40 ปี ต้องใช้เลนส์สำหรับแว่นตาที่มีกำลัง 2 diopters เพื่ออ่านหนังสือที่ระยะ 25 cm ได้อย่างสบายตา เมื่อชายคนนี้อายุ 45 ปี เขาใส่แว่นตานิยมนี้อ่านหนังสือ เขาต้องถือหนังสือที่ระยะ 40 cm จึงจะอ่านได้สบายตาเหมือนเดิม ถ้าเขาต้องการเปลี่ยนเลนส์ใหม่เพื่อให้สามารถอ่านหนังสือได้อย่างสบายตาที่ระยะ 25 cm เหมือนเดิม เลนส์ใหม่ที่ใช้ควรมีกำลังเท่าใด
- (5.2) (5 คะแนน) กำหนดวัตถุและฉากอยู่ห่างกัน 125 cm เราสามารถวางเลนส์นูนความยาวโฟกัส 25.0 cm ระหว่างวัตถุกับฉากได้สองตำแหน่งเพื่อทำให้เกิดภาพของวัตถุที่คมชัดบนฉาก จงหาระยะวัตถุที่สอดคล้องกับตำแหน่งของเลนส์ดังกล่าว
6. (5 คะแนน) ด้วยวิธีการ matrix หรือวิธีอื่น ๆ ที่เหมาะสม จงหาความยาวโฟกัสและตำแหน่งของ principle plane ของ ระบบเลนส์ในรูปข้างล่างนี้

